INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA **SSMR DÂMBOVIŢA**

CONCURSUL *CĂLIN BURDUŞEL*

EDIŢIA I , 28 ianuarie 2012

Problema 1. a) Fie a, b, c numere naturale care dau resturi diferite la împărţirea cu 3.

Demonstraţi că:

i) $a+b+c$ se divide cu 3;

ii) $a^2+b^2+c^2+1$ se divide cu 3;

iii) $a^3+b^3+c^3$ se divide cu 3.

b) Demonstraţi că din orice patru numere naturale diferite, putem alege două astfel încât suma cifrelor diferenţei lor să fie multiplu de 3.

Călin Burduşel

Problema 2. În exteriorul triunghiului oarecare ABC se construieşte dreptunghiul $BCDE$. Perpendicularele din D şi E duse pe AB şi respectiv AC se intersectează în M, iar perpendicularele din D şi E duse pe AC şi respectiv AB se intersectează în N.
a) Demonstraţi că: 1) $AM \perp BC$; 2) mijlocul segmentului (AN) se află pe mediatoarea segmentului (BC).
b) În ce caz mijlocul segmentului (AN) coincide cu centrul dreptunghiului $BCDE$?

Călin Burduşel

Problema 3. Arătaţi că un triunghi dreptunghic este isoscel dacă şi numai dacă $p=(1+\sqrt{2})h$ (p este semiperimetrul, iar h este înălţimea triunghiului corespunzătoare ipotenuzei).

Călin Burduşel

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 90 minute.*

BAREM DE NOTARE

Problema	Detalierea baremului	Punctaj parțial	Punctaj total
1.	Oficiu	1p	10p
	i)	1p	
	ii)	2p	
	iii)	2p	
	Există două numere care dau acelaşi rest la împărţirea cu 3.	2p	
	Diferenţa lor se divide cu 3.	1p	
	Suma cifrelor diferenţei se divide cu 3.	1p	
2	Oficiu	1p	10p
	Fie $ACDP$ paralelogram, deci *AP*//*CD, AP = CD.* Rezultă că $ABEP$ este paralelogram şi $AP \perp DE$.	2p	
	M este ortocentrul ΔPDE. $PM \perp DE, AP \perp DE,$ deci A, P, M coliniare şi $AM \perp BC$.	2p	
	Fie O mijlocul lui (AN) şi $ED \cap MN = \{R\}$. Cum $EMDN$ este paralelogram, rezultă că R este mijlocul lui (MN). În ΔNAM, RO este linie mijlocie, deci $OR \parallel AM$, de unde $OR \perp BC$. Deoarece R aparţine mediatoarei segmentului $(BC), O$ are aceeaşi proprietate.	3p	
	O este centrul dreptunghiului $BCDE \Leftrightarrow OR = \frac{1}{2}DC \Leftrightarrow OR = \frac{1}{2}AP.$ Dar $OR = \frac{1}{2}AM$, deci condiţia necesară şi suficientă ca O să fie centrul dreptunghiului $BCDE$ este ca $M = P \Leftrightarrow EP \perp AC \Leftrightarrow AB \perp AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ dreptunghic în A.	2p	
3.	Oficiu	1p	10p
	Implicaţia directă	3p	
	$p = \frac{1}{2}(a+b+\sqrt{a^2+b^2}), \quad h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$	1p	
	$(a+b)\sqrt{a^2+b^2} + a^2 + b^2 = 2(1+\sqrt{2})ab$	1p	
	$(a-b)^2 + (a+b)\sqrt{a^2+b^2} - 2\sqrt{2}ab = 0$	1p	
	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{2}\sqrt{ab},$	1p	
	deci $(a+b)\sqrt{a^2+b^2} \geq 2\sqrt{2}ab$	1p	
	Finalizare	1p	